FUNZIONI DI PIU' VARIABILI
Esercizi proposti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad [\ \{(x,y) : x^2+y^2<1\}\ ]$

(b) $f(x,y) = \sqrt{\log \dfrac{x-y}{xy}}$ $\quad [\{(x,y) : y \le \dfrac{x}{x+1}, x \neq -1 \cup x=-1, y>0\} - \{(x,y) : x \ge 0, y \le 0\}]$

(c) $f(x,y) = \log(1-x^2) + \log(1-y^2)$ $\quad [\ \{(x,y) : -1<x<1, -1<y<1\}\ ]$

(d) $f(x,y) = \tan \dfrac{y}{x}$ $\quad [\ \mathbf{R}^2 - \{(x,y) : y = k\pi x\ (k \in \mathbf{Z}) \cup x=0\}\ ]$

(e) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad [\ \{(x,y) : (x \ge 0, y \ge 0) \cup (x \le 0, y \le 0)\} - \{(0,0)\}\ ]$

(f) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ $\quad [\ \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}\ ]$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y) = 2x+3y$ $\quad [\ \{(x,y) : y = \dfrac{k-2x}{3}\}\ \forall k, \quad Im(f) = \mathbf{R}\ ]$

(b) $f(x,y) = x^2+4y^2$ $\quad [\ \{(x,y) : \dfrac{x^2}{(\sqrt{k})^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1\}\ \forall k \ge 0, \quad Im(f) = [0,+\infty)\ ]$

(c) $f(x,y) = xy$ $\quad [\ \{(x,y) : y = \dfrac{k}{x}\}\ \forall k, \quad Im(f) = \mathbf{R}\ ]$

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}$ $\quad [\ \{(x,y) : \dfrac{x^2}{k^2} + \dfrac{y^2}{(k/2)^2} = 1\}\ \forall k \ge 0, \quad Im(f) = [0,+\infty)\ ]$

(e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{2x^2+1}}$ $\quad [\ \{(x,y) : y = \dfrac{2k^2x^2}{1-k^2}\}\ \forall k \ge 0, k \neq 1, \quad \{(x,y) : x=0\}\ k=1, Im(f) = [0,+\infty)\ ]$

3. Calcolare i seguenti limiti :

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ [non esiste]

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ [0]

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\sqrt{x^2+y^2}$ $[-\infty]$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ [non esiste]

4. Verificare che le seguenti funzioni sono continue sul loro dominio, e provare che possono essere prolungate per continuità su tutto $\mathbf{R}^2$

(a) $f(x,y) = xy\,\log(x^2+y^2)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}-1}{x+y}$

5. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sin x}$ $\quad \left[\left(\dfrac{-y\cos x}{\sin^2 x}, \dfrac{1}{\sin x}\right)\right]$

(b) $f(x,y) = \tan\dfrac{y}{x}$ $\quad \left[\left(\dfrac{-y}{x^2\cos^2(y/x)}, \dfrac{1}{x\cos^2(y/x)}\right)\right]$

(c) $f(x,y) = e^{x/y}$ $\quad \left[\left(\dfrac{-ye^{x/y}}{x^2}, \dfrac{e^{x/y}}{x}\right)\right]$

(d) $f(x,y) = y^{\log x}$ $\quad \left[\left(\dfrac{y^{\log x}\log y}{x}, y^{\log x - 1}\log x\right)\right]$

(e) $f(x,y) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^y$ $\quad \left[\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{y-1}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right), \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^y \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$

6. Determinare il gradiente (se esiste) delle seguenti funzioni nei punti indicati:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ in $(0,0)$ [non esiste]
   (b) $f(x,y) = |\sin x - \sin y|(x^2+y^2)$ in $(0,0)$ $[(0,0)]$
   (c) $f(x,y) = (xy-x-y)|x-y^2|$ in $(1,1)$ $[(0,0)]$

7. Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ [continua, non differenziabile su $\{(x,y) : y = x\}$]
   (b) $f(x,y) = |x+y|(x^2+y^2)$ [continua, non differenziabile su $\{(x,y) : y = -x,\ x \neq 0\}$]
   (c) $f(x,y) = |y|\sin(x^2+y^2)$ [continua, non differenziabile su $\{(x,y) : y = 0,\ x \neq 0\}$].

8. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

   (a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
   $$\Big[\nabla f(x,y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2),$$
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xye^{x^2+y^2}\Big]$$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{y-2x^2}$
   $$\Big[\nabla f(x,y) = \Big(\frac{-2x}{\sqrt{y-2x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y-2x^2}}\Big),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2y}{(y-2x^2)^{3/2}},$$
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{4(y-2x^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x}{(y-2x^2)^{3/2}}\Big]$$

   (c) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{x+y}$
   $$\Big[\nabla f(x,y) = \Big(-\frac{1}{x+y}, -\frac{1}{x+y}\Big),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2},$$
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}\Big]$$

9. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{y+x^2}{x-y^4-y}$ in $(1,0)$ nella direzione $\vec{v} = (2,1)$ $[4]$
   (b) $f(x,y) = e^{-x^2+y^4}$ in $(1,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,1)$ $\left[-\dfrac{2}{e}\right]$.

10. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

    (a) $f(x,y) = x^2+y^2+1$ nel punto $(0,1,2)$ $[z = 2y]$
    (b) $f(x,y) = x^2-y^2$ nel punto $P(1,1,0)$ $[z = 2(x-y)]$
    (c) $f(x,y) = x^4-x^2y^2-2x^2+2y^2$ nel punto $P(0,1,2)$ $[z = 4y-2]$

11. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

    (a) $f(x,y) = x^2+y^2+xy\sin(xy)$ $[f(x,y) = x^2+y^2+o(x^2+y^2)]$
    (b) $f(x,y) = \log(1+x^2y^2)$ $[f(x,y) = o(x^2+y^2)]$
    (c) $f(x,y) = ye^x$ $[f(x,y) = y+xy+o(x^2+y^2)]$

12. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

    (a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $\quad$ [$(-4,6)$ sella]

    (b) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(y - x^2 + 1)$ $\quad$ [$(0,-1), (1,0), (-1,0)$ selle ; $(0, 1/3)$ minimo]

    (c) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ $\quad$ [$(0,0)$ sella ; $(1,1)$ minimo]

    (d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$ $\quad$ [$(-1/3, -1/3)$ massimo ; $(-1,-1), (1,-1), (-1,1)$ selle]

    (e) $f(x,y) = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$ $\quad$ [$(-1,0), (1,0)$ minimi ;
    $(0,0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ selle]

    (f) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{8} - y$ $\quad$ [$(-64, -8)$ sella]

    (g) $f(x,y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$ $\quad$ [$(-1,0)$ minimo ; $(1,0)$ massimo]

    (h) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{4 + x^2} + \dfrac{1}{2}y$ $\quad$ [$(0,-1)$ minimo ; $(2,-2), (-2,-2)$ selle]

    (i) $f(x,y) = \sqrt{-x^2 - y^2 - xy + 3}$ $\quad$ [$(0,0)$ massimo]

    (j) $f(x,y) = \sqrt{-x^2y + xy - 2x + 1}$ $\quad$ [$(0,2)$ sella]

    (k) $f(x,y) = e^{x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2}$ $\quad$ [$(0,2), (-\sqrt{2}, 0)(\sqrt{2}, 0)$ selle ; $(0,0), (\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 2)$ massimi]

    (l) $f(x,y,z) = xyz$ $\quad$ [gli assi coordinati sono punti di sella]

13. Data la funzione $z = y^{2x}$, si chiede di:

    (a) Determinarne il dominio. $\quad$ [$\{(x,y) : y > 0\}$]
    (b) Scriverne la formula di Taylor nell'intorno del punto $(1,1)$, esplicitandone i termini fino al secondo ordine compreso. $\quad$ [$2 - 2x - 2y + 2xy + y^2 + o(x^2 + y^2)$]
    (c) Trovarne i punti stazionari e stabilirne il tipo. $\quad$ [$(0,1)$ sella]

14. Data la funzione $f(x,y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 4x - 4$, cercarne i punti critici e caratterizzarli con la matrice Hessiana. Calcolare inoltre la derivata direzionale di f nel punto di coordinate (1,1) e nella direzione del versore $\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

    [$(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$ selle , $(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 0)$ massimo , $(\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 0)$ minimo , $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{u}}(1,1) = \sqrt{2}$]

15. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ del campo scalare $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$

    [$\nabla f = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} (x,y,z), \;\; \nabla^2 f = 0$]

16. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

    (a) $F(x,y,z) = (xy^2,\ yz^2,\ zx^2)$ $\quad$ [$\nabla \cdot F = x^2 + y^2 + z^2, \quad \nabla \wedge F = (2yz,\ 2xz,\ 2xy)$]

    (b) $F(x,y,z) = (xe^z,\ ye^x,\ ze^y)$ $\quad$ [$\nabla \cdot F = e^x + e^y + e^z, \quad \nabla \wedge F = (-e^y z,\ -e^z x,\ -e^x y)$]

    (b) $F(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ $\quad$ [$\nabla \cdot F = 3, \quad \nabla \wedge F = (0,0,0)$]

    (d) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$ $\quad$ [$\nabla \cdot F = 0, \quad \nabla \wedge F = (0,0,0)$]